



# Transition endommagent non local - fissuration dans le cadre de la rupture quasi-fragile

Sam Cuvilliez, Frédéric Feyel, Eric Lorentz, Sylvie Michel-Ponnelle

## ► To cite this version:

Sam Cuvilliez, Frédéric Feyel, Eric Lorentz, Sylvie Michel-Ponnelle. Transition endommagent non local - fissuration dans le cadre de la rupture quasi-fragile. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. 8 p. hal-00592778

**HAL Id: hal-00592778**

**<https://hal.science/hal-00592778>**

Submitted on 3 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Transition endommagement non local - fissuration dans le cadre de la rupture quasi-fragile

S. Cuvilliez<sup>1,2,4</sup>, F. Feyel<sup>3</sup>, E. Lorentz<sup>1,2</sup>, S. Michel-Ponnelle<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> EDF R&D, 1, avenue du Général de Gaulle, 92141 Clamart Cedex, France, sam.cuvilliez@edf.fr

<sup>2</sup> LaMSID – UMR EDF/CNRS/CEA 2832, 1, avenue du Général de Gaulle, 92141 Clamart Cedex, France

<sup>3</sup> ONERA, BP72 – 29 avenue de la Division Leclerc, 92322 Châtillon Cedex, France

<sup>4</sup> Centre des matériaux, Mines Paris, ParisTech, CNRS UMR 7633, BP 87 F-91003 Evry Cedex, France

**Résumé** — On propose une méthode permettant d'assurer la transition et l'équivalence énergétique entre un modèle non local à gradient d'endommagement et un modèle de zones cohésives. Dans un premier temps, on identifie analytiquement (sur un problème unidimensionnel) une famille de lois cohésives permettant de basculer du modèle non local vers le modèle cohésif, et ce quelque soit le niveau de dégradation atteint par le matériau. Cette stratégie est ensuite étendue au cadre bidimensionnel éléments finis, en couplant les représentations continues et discrètes dans le cas de la propagation de fissures rectilignes en mode I.

**Mots clefs** — endommagement non local, modèles de zones cohésives, équivalence énergétique.

## 1 Introduction

La mécanique continue de l'endommagement [3] (CDM) et les modèles de zones cohésives [1] (CZM) sont deux approches qui ont prouvé leur capacité à modéliser la ruine des structures dans le cadre de la rupture quasi-fragile. Dans sa version locale, l'approche continue conduit à une dépendance pathologique des solutions au maillage qui peut être surmontée par le recours à certaines méthodes de régularisation [7, 8, 9]. Les méthodes non locales qui en découlent permettent de décrire l'amorçage et la propagation de fissures dans un cadre cohérent, elles se heurtent toutefois à l'incapacité de prendre en compte ces fissures comme des surfaces de discontinuité du champ de déplacement. On s'intéressera par la suite aux formulations non locales à gradient d'endommagement [6]. La seconde approche (CZM) permet de rendre compte du processus de fissuration en définissant une énergie de surface dépendant du saut de déplacement entre les lèvres de la fissure. Ces modèles discontinus permettent de décrire l'amorçage et la propagation de fissures, mais pour des trajets connus *a priori*.

Afin de bénéficier des avantages de chacune des approches, on souhaite décrire le processus de fissuration en les couplant. Dans un premier temps on développe analytiquement cette stratégie dans un contexte unidimensionnel, puis on l'étend aux propagations bidimensionnelles et rectilignes de fissures (en mode I) dans le cadre éléments finis.

## 2 Modèle à gradient d'endommagement

On rappelle brièvement dans cette partie les caractéristiques du modèle à gradient d'endommagement proposé dans [6], ainsi que la solution analytique qu'il admet pour le problème unidimensionnel d'une barre en traction.

### 2.1 Équations constitutives

Le matériau considéré est élastique fragile, son état est caractérisé par le tenseur des déformations  $\epsilon$  et par une variable scalaire d'endommagement  $a$  qui dégrade progressivement sa rigidité initiale. La relation contrainte – déformation correspondante s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = A(a)\mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1)$$

avec  $\boldsymbol{\sigma}$  le tenseur des contraintes,  $\mathbf{E}$  le tenseur de Hooke et  $0 \leq A(a) \leq 1$  la fonction affectant la rigidité du matériau. Lorsque le matériau est sain  $a=0$  et  $A(0)=1$ , lorsqu'il est totalement endommagé  $a=1$  et  $A(1)=0$ . La force thermodynamique associée à l'endommagement dérive de l'énergie élastique :

$$Y = -\frac{1}{2} A'(a) \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2)$$

Le phénomène de localisation est contrôlé en introduisant le laplacien de l'endommagement dans l'expression de la fonction de charge, assurant ainsi un couplage entre points matériels :

$$f(Y, \nabla^2 a) = Y + c \nabla^2 a - k \quad (3)$$

$$f \leq 0 ; \quad \dot{a} \geq 0 ; \quad \dot{a} f = 0 \quad (4)$$

où  $c$  désigne le paramètre qui contrôle l'intensité du couplage et  $k$  le seuil d'élasticité. L'évolution de l'endommagement est alors gouvernée par la condition de Kuhn – Tucker (4).

Cette classe de modèle entre dans le cadre des matériaux standards généralisés. La densité d'énergie libre  $\phi$  et le potentiel de dissipation  $\psi$  s'écrivent alors, avec  $I_{\mathbb{R}^+}$  la fonction indicatrice assurant la condition d'irréversibilité  $\dot{a} \geq 0$  :

$$\phi(\boldsymbol{\varepsilon}, a) = \frac{1}{2} A(a) \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{c}{2} (\nabla a)^2 ; \quad \psi(\dot{a}) = k \dot{a} + I_{\mathbb{R}^+}(\dot{a}) \quad (5)$$

## 2.2 Solution analytique du problème unidimensionnel

On considère une barre unidimensionnelle de longueur  $2L$ , soumise à un chargement de traction (déplacement imposé) à ses deux extrémités. Le matériau considéré (initialement sain) est élastique endommageable et caractérisé par le modèle à gradient d'endommagement. On s'intéresse à la solution inhomogène pour laquelle l'endommagement localise au centre de la barre ( $x=0$ ), réduisant alors le domaine d'étude à l'intervalle  $[0, L]$ . Pour un niveau de chargement toujours croissant (pas de décharge), et une fois la limite d'élasticité franchie, le niveau de chargement peut être paramétré par la valeur maximale d'endommagement  $a_0$  atteinte au centre de la bande de localisation ( $x=0$ ). L'évolution de l'endommagement a lieu dans la (demi) bande de localisation  $[0, b]$  dont la frontière  $b$  est fonction du paramètre de chargement  $a_0$ , ce qui d'après (4) s'écrit :

$$\begin{cases} f = 0 \text{ et } \dot{a} \geq 0 & \text{dans } ]0, b[ \\ f \leq 0 \text{ et } \dot{a} = 0 & \text{dans } ]b, L[ \end{cases} \quad (6)$$

Le système différentiel (6) peut être intégré simplement dans le cas où la largeur  $b$  de la bande de localisation croît avec le niveau de chargement  $a_0$ , la contrainte d'irréversibilité  $\dot{a} \geq 0$  s'appliquant alors naturellement dans l'intervalle  $[0, b]$  où l'endommagement se développe. Dans [5] et [6], cette propriété de croissance est obtenue pour plusieurs expressions de la fonction affectant la rigidité  $A(a)$  (1), dont on retient ici l'expression suivante :

$$A(a) = \left( \frac{1-a}{1+\gamma a} \right)^2, \gamma > 0 \quad (7)$$

La résolution de (6) se réduit alors à l'intégration d'une équation différentielle non linéaire, conduisant à l'expression implicite de l'abscisse  $x$  en fonction de la variable d'endommagement  $a$ , paramétrée par le chargement  $a_0$  :

$$x(a_0, a) = \int_a^{a_0} G(a_0, s)^{-1/2} ds, \text{ avec } G(a_0, a) = \frac{2ka_0}{c} \left( \frac{a}{a_0} - \frac{A(a)^{-1} - 1}{A(a_0)^{-1} - 1} \right) \quad (8)$$

Enfin, l'analyse de l'état d'endommagement ultime permet d'identifier les paramètres internes du modèle  $c$ ,  $k$  et  $\gamma$  en fonction de paramètres macroscopiques observables : l'énergie de rupture  $G_f$ , la contrainte au pic  $\sigma_y$  et la largeur de la bande de localisation à rupture  $2D$ .

$$k = \frac{3}{4} \frac{G_f}{D} ; \quad c = \frac{3}{8} G_f D ; \quad \gamma = \frac{3}{4} \frac{EG_f}{\sigma_y^2 D} - 1 \quad (9)$$

Les valeurs de ces paramètres sont choisies représentatives du béton pour la suite de l'étude (Tableau 1).

Paramètres observables	Paramètres internes
$E = 3.10^4 \text{ MPa}$	$k = 1,5.10^{-3} \text{ MPa}$
$\sigma_y = 3 \text{ MPa}$	$\gamma = 4$
$G_f = 0.1 \text{ N/mm}$	$c = 1.875 \text{ N}$
$2D = 100 \text{ mm}$	

TAB. 1 – paramètres matériaux représentatifs du béton

### 3 Étude analytique de la transition endommagement non local / modèle de zone cohésive dans un cadre unidimensionnel

Disposant de la solution analytique décrivant la rupture du barreau avec le modèle à gradient, on souhaite d'abord construire une loi cohésive énergétiquement équivalente au modèle d'endommagement. Dans ce cas la barre reste élastique et une interface cohésive est insérée en son centre (Figure 1 (a)). On souhaite ensuite développer la stratégie suivante : décrire dans un premier temps le régime non linéaire par l'approche continue seule, et basculer à partir d'un instant arbitraire vers un modèle discontinu, en considérant une interface cohésive au centre de la bande de localisation tout en conservant la distribution de rigidité dégradée. Une fois cette transition déclenchée, le mécanisme dissipatif est uniquement pris en charge dans l'interface précédemment introduite (qui se réduit ici à un point), la barre entière demeurant élastique par la suite (Figure 1 (b)).

Le caractère unidimensionnel du problème permet d'assurer l'équivalence énergétique d'une manière simple. En effet, l'égalité des incréments d'énergie dissipée par chacun des modèles peut être imposée en assurant qu'à chaque niveau de contrainte  $\sigma$  (homogène dans la barre d'après l'équation d'équilibre) correspond le même déplacement imposé  $U$ . Chaque modèle doit donc fournir la même réponse globale contrainte – déplacement imposé.

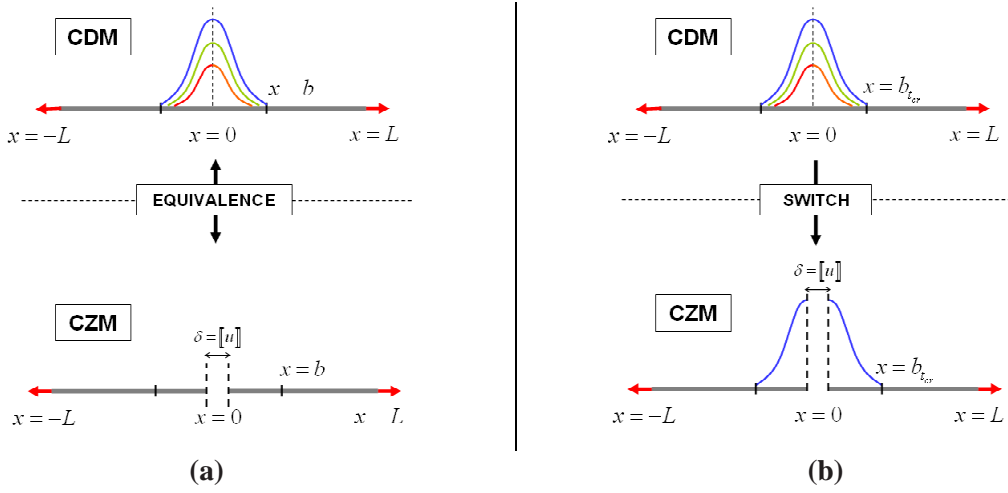


FIG. 1 – (a) équivalence CDM/CZM ; (b) transition CDM / CZM

### 3.1 Identification d'une loi d'interface équivalente

Soient  $U^{CDM}$  et  $U^{CZM}$  les déplacements imposés à l'abscisse  $x=L$  respectivement pour les approches continue et cohésive :

$$U^{CDM} = \int_0^L \varepsilon^{CDM} dx = \frac{\sigma}{E} \int_0^L \frac{dx}{A(a(x))} ; \quad U^{CZM} - \frac{\delta^{EQ}}{2} = \int_0^L \varepsilon^{CZM} dx = \frac{\sigma}{E} L \quad (10)$$

où  $\delta^{EQ} = \llbracket u \rrbracket_{x=0}$  représente le saut de déplacement à l'interface cohésive  $x=0$ . En imposant l'égalité entre  $U^{CDM}$  et  $U^{CZM}$  pour tout niveau de contrainte  $\sigma$ , on déduit l'expression du saut de déplacement de la loi cohésive équivalente :

$$\forall \sigma, U^{CDM} = U^{CZM} \Rightarrow \delta^{EQ}(\sigma) = \frac{2\sigma}{E} \left( \int_0^L \frac{dx}{A(a(x))} - L \right) = \frac{2\sigma}{E} \left( \int_0^b \frac{dx}{A(a(x))} - b \right) \quad (11)$$

### 3.2 Transition CDM / CZM

Soit  $t_{cr}$  l'instant « critique » à partir duquel le modèle continu bascule vers le modèle cohésif. On conserve la notation  $U_t^{CDM}$  pour désigner le déplacement imposé à l'instant  $t$  vu par l'approche continue, et  $U_t^{TR}$  désigne le déplacement imposé à  $t > t_{cr}$  une fois la transition continu - discontinu déclenchée. Ces quantités s'écrivent, avec  $\delta_t^{TR}$  le saut de déplacement à l'interface  $x=0$  :

$$\forall t > t_{cr}, \quad U_t^{CDM} = \frac{\sigma_t}{E} \int_0^L \frac{dx}{A(a_t)} \quad \text{et} \quad U_t^{TR} - \frac{\delta_t^{TR}}{2} = \frac{\sigma_t}{E} \int_0^L \frac{dx}{A(a_{t_{cr}})} \quad (12)$$

L'équivalence énergétique permet alors de déduire l'expression de ce saut :

$$\forall t > t_{cr}, \quad U_t^{CDM} = U_t^{TR} \Rightarrow \frac{\delta_t^{TR}(\sigma_t)}{2} = \frac{\sigma_t}{E} \int_0^L \left( \frac{1}{A(a_t)} - \frac{1}{A(a_{t_{cr}})} \right) dx \quad (13)$$

qui peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\delta^{TR}(\sigma_t) = \frac{2\sigma_t}{E} \int_0^{b_t} \left( \frac{1}{A(a_t)} - 1 \right) dx - \frac{2\sigma_t}{E} \int_0^{b_{cr}} \left( \frac{1}{A(a_{t_{cr}})} - 1 \right) dx \quad (14)$$

Le saut de déplacement (14) s'exprime alors comme la différence de deux termes positifs :

- le premier n'est autre que le saut  $\delta^{EQ}$  de la loi cohésive équivalente (11)
- le second, que l'on notera  $\delta_{t_{cr}}^{CO}$ , est un terme correctif paramétré par  $t_{cr}$  et variant linéairement avec la contrainte  $\sigma_t$

La loi d'interface équivalente  $(\delta^{EQ}, \sigma)$  est donc une courbe maîtresse qui ne dépend que du modèle d'endommagement continu, et dont on déduit selon (15) la loi cohésive  $(\delta_{t_{cr}}^{TR}, \sigma)$  permettant d'assurer le changement de modèle à l'instant  $t_{cr}$  :

$$\delta_{t_{cr}}^{TR}(\sigma_t) = \delta^{EQ}(\sigma_t) - \delta_{t_{cr}}^{CO}(\sigma_t) \quad (15)$$

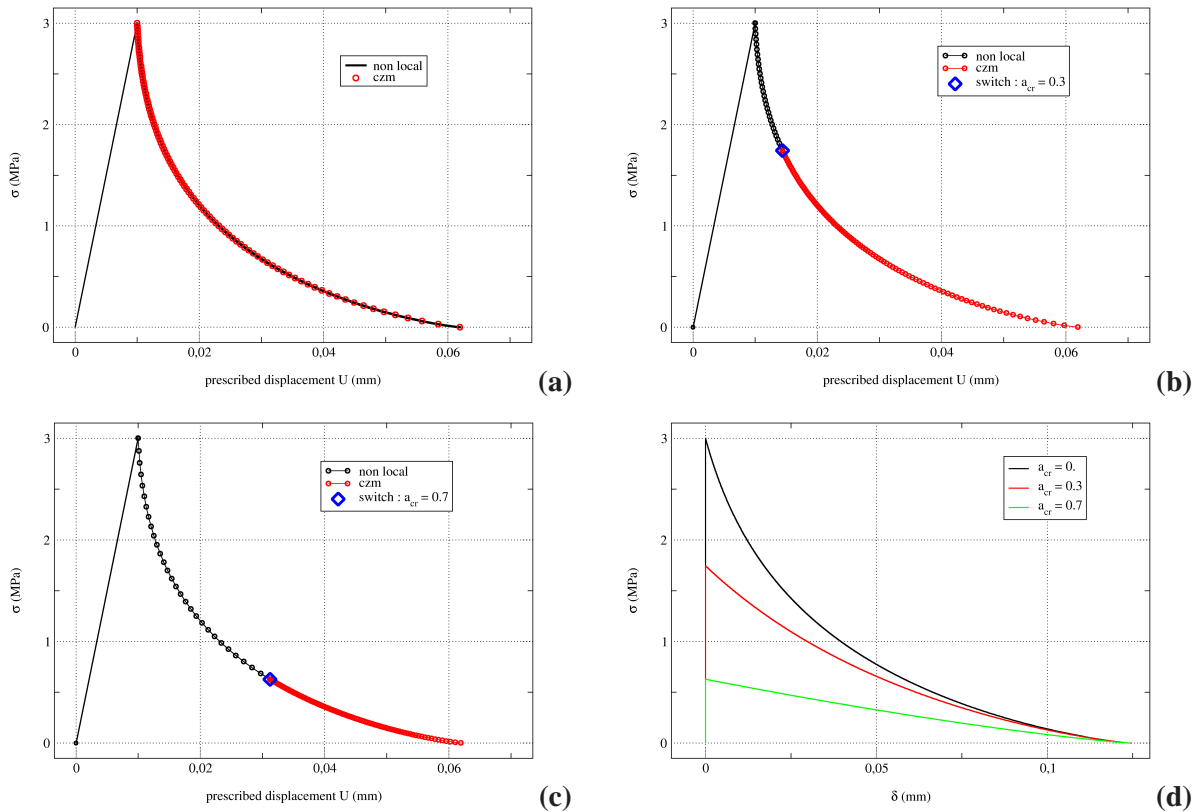


FIG. 2 – (a) réponses globales de la barre obtenues avec le modèle continu et le modèle cohésif équivalent ; (b) réponse globale de la barre obtenue avec une transition CDM/CZM à  $a_{cr} = 0.3$  ; (c) idem avec  $a_{cr} = 0.7$  ; (d) lois cohésives correspondantes

Les résultats présentés à la Figure 2 ont été obtenus pour une barre de longueur  $2L = 200$  mm et pour des valeurs de paramètres matériaux spécifiées au Tableau 1. La Figure 2 (a) montre que les réponses obtenues avec le modèle non local et le modèle cohésif équivalent seul sont bien coïncidentes. De même pour les Figures 2 (b,c) où le changement de modèle est déclenché pour deux

instants  $t_{cr}$  correspondant à des paramètres de chargement valant  $a_0 = 0.3$  et  $0.7$  (ce que l'on notera par la suite  $a_{cr} = 0.3$  et  $0.7$ ), les réponses obtenues coïncident avec celles du modèle de référence. Enfin, on trace Figure 2 (d) les lois cohésives utilisées : en noir la loi cohésive équivalente  $(\delta^{EQ}, \sigma)$ , en rouge et en vert les lois cohésives  $(\delta^{TR}, \sigma)$  assurant la transition respectivement pour  $a_{cr} = 0.3$  et  $0.7$ .

## 4 Extension au cadre 2D éléments finis

### 4.1 Mise en œuvre numérique

On étend ensuite cette stratégie à la méthode des éléments finis dans l'esprit des travaux présentés dans [2], pour des situations bidimensionnelles et des trajets de fissuration rectilignes en mode I. Deux niveaux de description de la fissure doivent alors coexister au cours de sa propagation : en amont une process zone non locale, suivie par une fissure cohésive dont les lèvres s'ouvrent progressivement suivant une loi d'interface identifiée localement (en chaque point d'intégration des éléments cohésifs) selon la méthode décrite dans la section précédente (en raisonnant dans la direction normale au trajet de fissuration). On considère qu'un élément cohésif doit être « activé » dès lors que la valeur d'endommagement critique  $a_{cr}$  est dépassée dans les éléments du massif situés dans son voisinage direct : dans ce cas l'endommagement ne doit plus y évoluer puisque l'énergie qui aurait été dissipée par le modèle non local alimente désormais l'énergie de surface du modèle cohésif. En l'état, cette méthode s'appuie sur des maillages structurés au niveau de la bande de localisation attendue (voir Figure 3 (b) et Figure 4 (a)) afin de faciliter le traitement du voisinage de l'interface cohésive. Cette dernière est quant à elle prise en compte dans la discrétisation dès le début du calcul.

L'implémentation des éléments finis non locaux et cohésifs repose sur des formulations mixtes détaillées respectivement dans [6] et [4], les simulations ont été réalisées avec le code de calcul éléments finis *Code\_Aster* [10] développé par EDF R&D.

### 4.2 Résultats

Parmi les tests réalisés, on présente ici une étude permettant d'évaluer la robustesse de la méthode proposée dans un cas de multi fissuration instable. On considère une plaque trouée soumise à un chargement de type effort imposé, la géométrie et les conditions de chargement sont spécifiées à la Figure 3 (a), le maillage utilisé est représenté Figure 3 (b). Les paramètres matériaux sont ceux du Tableau 1, avec un coefficient de Poisson fixé à  $\nu = 0.2$ . La rupture simultanée des deux ligaments situés de part et d'autre du trou conduit à la propagation brutale de deux fissures. Le caractère instable de la propagation conduit à la présence de snap-backs dans la réponse globale de la structure, nécessitant le recours à une méthode de pilotage du chargement. Trois simulations sont effectuées : la première avec le modèle d'endommagement à gradient, la deuxième avec le modèle cohésif (loi d'interface équivalente) et la dernière avec l'approche couplée décrite ci-dessus pour une transition non local / cohésif telle que  $a_{cr} = 0.5$ .

Les résultats sont présentés à la Figure 4. La carte d'endommagement Figure 4 (a) en configuration déformée ne concerne que l'approche couplée, et illustre la propagation simultanée des deux fissures. Chacune d'entre elles est bien constituée d'une process zone non locale suivie par la pointe de fissure cohésive. On s'assure également qu'au cours de la propagation la valeur de l'endommagement du massif dans les couches d'éléments voisines de la discontinuité n'a pas excédé la valeur d'endommagement critique  $a_{cr} = 0.5$ .

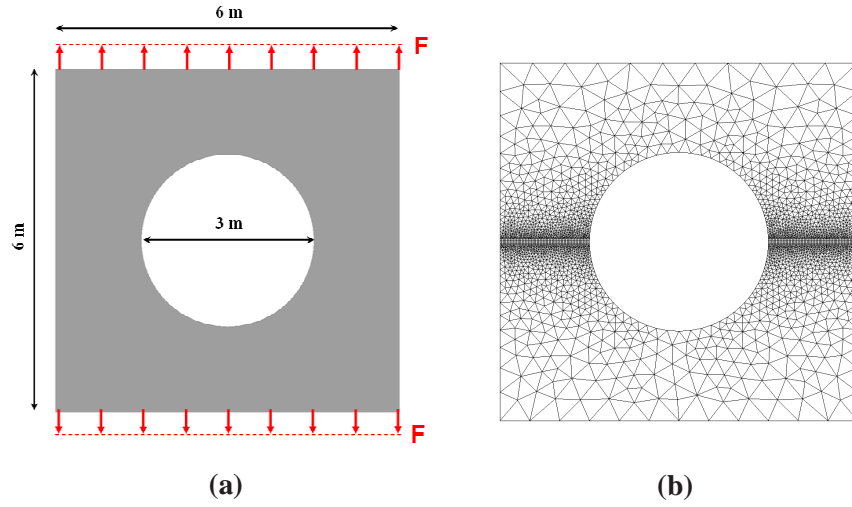


FIG. 3 – Plaque entaillée : (a) géométrie et chargement ; (b) maillage

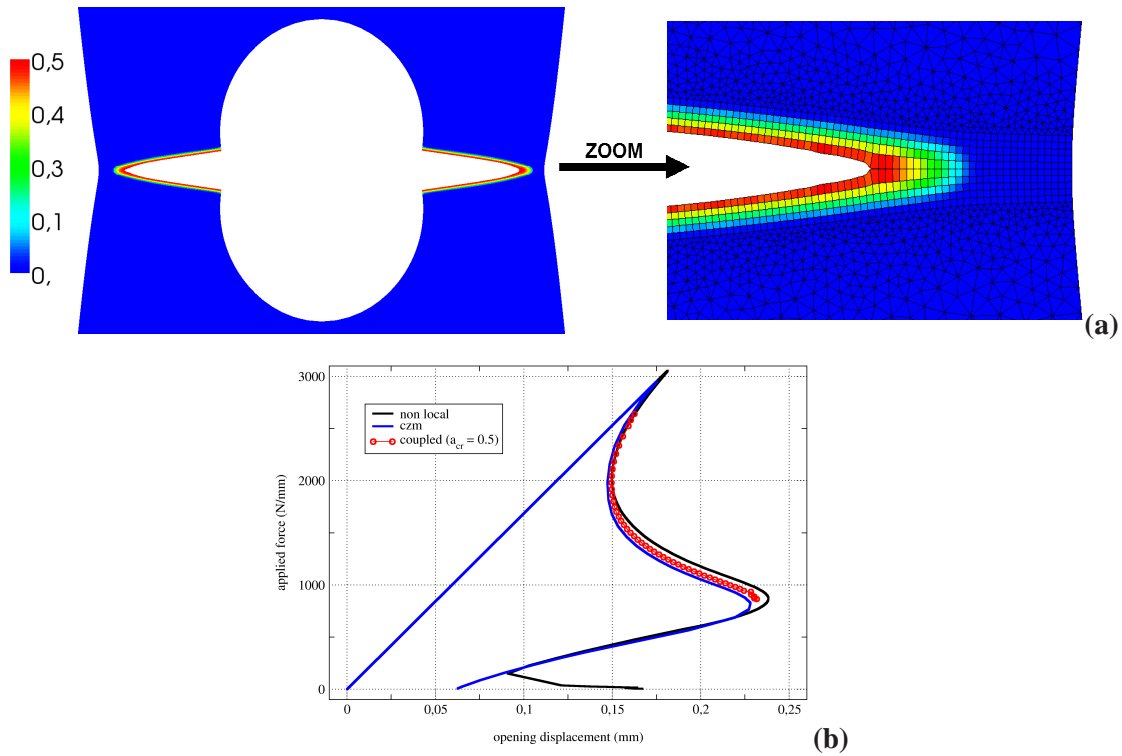


FIG. 4 – Plaque entaillée : (a) carte d'endommagement dans la configuration déformée (x1000) ;  
(b) réponse globale force - déplacement de la structure

Les réponses globales relatives aux trois simulations sont tracées Figure 4 (b). Le premier snap-back correspond à la propagation des deux fissures et s'arrête lorsque les process zones atteignent le bord de la structure, le second correspond à la rupture complète des ligaments. Si les réponses des modèles non local et cohésifs sont identiques en 1D, on constate que pour les problèmes 2D le modèle continu conduit à une valeur d'énergie dissipée plus élevée qu'avec le modèle cohésif. Cet écart reste relativement acceptable et tend à diminuer dès lors que l'on raffine le maillage dans la bande de localisation, ce qui permet notamment de décrire avec de plus de précision les forts gradients observés lorsque la dégradation du matériau est presque complète. Enfin, la courbe de réponse obtenue avec



l'approche couplée se situe entre les deux précédentes. En effet l'endommagement du massif ne pouvant dépasser la valeur  $a_{cr} = 0.5$  et l'énergie de surface transférée aux éléments cohésifs étant identifiée sur la base du problème 1D, on évite d'atteindre des niveaux d'endommagement trop élevés vis-à-vis du degré de raffinement du maillage qui conduiraient à l'écart discuté précédemment.

## 5 Conclusions et perspectives

On a montré que la méthode proposée dans cette étude permet de faire coexister les approches continue et discrète dans un cadre énergétique cohérent, tout en traitant des cas de fissuration complexes (restreints au cas de trajets de fissuration rectiligne). Les résultats obtenus ouvrent de nombreuses perspectives :

- extension de la méthode à des situations 3D de fissuration plane
- extension aux maillages non structurés et prise en compte progressive de l'interface cohésive dans la discrétisation
- l'extension aux propagations de fissures en mode mixte pose de nombreuses questions d'ordre théoriques, notamment sur l'identification des lois cohésives.

## Références

- [1] G.I. Barenblatt. *The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture*, Advan. Appl. Mech. 7, 55-129, 1962
- [2] C. Comi, S. Mariani, U. Perego. *An extended FE strategy for transition from continuum damage to mode I cohesive crack propagation*, Int. J. for Num. and Anal. Meth. in Geomech., 31(2), 213-238, 2007.
- [3] J. Lemaitre, J-L. Chaboche. *Mécanique des matériaux solides*, Dunod, 1988.
- [4] E. Lorentz. *A mixed interface finite element for cohesive zone models*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 302-317, 2008
- [5] E. Lorentz, S. Cu villiez, K. Kazymyrenko, *Convergence of a gradient damage model toward a cohesive zone model*, C.R. Mécanique (2010) doi 10.1016/j.crme.2010.10.010.
- [6] E. Lorentz, V. Godard, *Gradient damage models: Toward full-scale computations*, accepted in Comput. Methods Appl. Mech. Engrg (2010),doi: 10.1016/j.cma.2010.06.025
- [7] R.H.J. Peerlings, R. de Borst, W.A.M. Brekelmans, J.H.P de Vree. *Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials*, Int. J. Num. Meth. Engng., 39, 3391–3403, 1996.
- [8] G. Pijaudier-Cabot, Z.P. Bazant. *Nonlocal damage theory*, J. Eng. Mech., 113, 1512-1533, 1987.
- [9] N. Triantafyllidis, E.C. Aifantis. *A gradient approach to localization of deformation. I: Hyperelastic materials*. J. Elasticity 16, 225–237, 1986.
- [10] Site officiel de Code\_Aster, [www.code-aster.org](http://www.code-aster.org)